ÉPREUVE DE PROBABILITÉS ET STATISTIQUES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

(Option biochimie - biologie)

DURÉE : 4 heures

PREMIÈRE PARTIE

PROBABILITÉS ET STATISTIQUES MATHÉMATIQUES

DURÉE : 1 h 30

N.B. — *Les candidats sont priés :*

1° *D'écrire très lisiblement, de soigner la rédaction et la présentation matérielle. Il convient de numéroter les diverses questions en les séparant très nettement,* de respecter les notations de l'énoncé.

2° *De donner les explications nécessaires et suffisantes en faisant figurer sur la copie tous les calculs intermédiaires.*

3° *De donner les résultats encadrés.*

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

Les théorèmes de probabilité utilisés devront être énoncés avec précision.

On étudie l'évolution d'une population de chats sauvages avec les conventions suivantes :

1° On considère une suite $(\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de générations telles que la génération $\mathcal{G}_{n+1}$ soit constituée des enfants des animaux de la génération $\mathcal{G}_n$; $\mathcal{G}_0$ désigne la population au début de l'étude.

2° Chaque animal est porteur d'un gène g à deux allèles a_1 et a_2, de sorte que pour chaque n, les trois événements :

$E_1^{(n)}$: « un chat de la génération $\mathcal{G}_n$ est porteur de deux allèles a_1 » ;
$E_2^{(n)}$: « un chat de la génération $\mathcal{G}_n$ est porteur de deux allèles a_2 » ;
$E_3^{(n)}$: « un chat de la génération $\mathcal{G}_n$ est porteur d'un allèle a_1 et d'un allèle a_2 »
constituent un système complet d'événements.

Si un animal d'une génération $\mathcal{G}_n$ appartient à $E_k^{(n)}$, $k \in \{1, 2, 3\}$, on dira qu'il est du type T_k.

Pour chaque n on pose : $A_n = P(E_1^{(n)})$; $B_n = P(E_2^{(n)})$; $C_n = P(E_3^{(n)})$.

3° Si pour chaque n, on considère les événements $F_l^{(n)}$, $l \in \{1, 2\}$, définis par $F_l^{(n)}$: « un allèle d'un chat de la génération $\mathcal{G}_n$ est un allèle a_l », on suppose que les probabilités conditionnelles $P(F_i^{(n)}/E_j^{(n)})$ sont définies par le tableau suivant :

i \ j	1	2	3
1	1	0	$\frac{1}{2}$
2	0	1	$\frac{1}{2}$

On pose de plus, pour chaque n

$$p_n = P(F_1^{(n)}) \quad \text{et} \quad q_n = P(F_2^{(n)})$$

et on suppose que p_0 et q_0 sont connus, tels que $p_0 > 0$, $q_0 > 0$, $p_0 + q_0 = 1$.

Tournez la page S.V.P.

4° À sa naissance tout animal de la génération $\mathcal{G}_{n+1}$ reçoit de chacun de ses parents l'allèle a_1 ou l'allèle a_2 et on suppose que la probabilité conditionnelle $P(E_i^{(n+1)}/E_j^{(n)} \times E_k^{(n)})$ pour qu'un chat de la génération $\mathcal{G}_{n+1}$ soit de type T_i sachant que son père est de type T_j et sa mère de type T_k est définie par le tableau suivant :

i \ (j, k)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(2, 2)	(2, 3)	(3, 3)
1	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{4}$
2	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
3	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

avec la convention supplémentaire $P(E_i^{(n+1)}/E_j^{(n)} \times E_k^{(n)}) = P(E_i^{(n+1)}/E_k^{(n)} \times E_j^{(n)})$ si $k \neq j$.

On suppose que le choix des parents se fait au hasard, c'est-à-dire que pour chaque n :

$$(\forall (j, k) \in \{1, 2, 3\}^2)\left(P(E_j^{(n)} \times E_k^{(n)}) = P(E_j^{(n)}) \cdot P(E_k^{(n)})\right).$$

1. On admet dans cette partie que tous les animaux d'une génération se reproduisent.

   Pour chaque entier naturel n :

   1° Démontrer que $p_n = A_n + \frac{1}{2}C_n$ et $q_n = B_n + \frac{1}{2}C_n$. Que peut-on dire de $p_n + q_n$?

   2° Calculer A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1} en fonction de A_n, B_n, C_n et démontrer que :

   $$A_{n+1} = p_n^2 \qquad B_{n+1} = q_n^2 \qquad C_{n+1} = 2p_nq_n.$$

   3° En déduire p_{n+1} en fonction de p_n et q_{n+1} en fonction de q_n. Que peut-on en déduire quant à l'évolution de la présence des allèles a_1 et a_2 dans les diverses générations ?

2. On décide de tenir compte de la mortalité à chaque génération en admettant l'existence de constantes réelles strictement positives w_1, w_2, w_3 telles que pour chaque n :

   $$A_{n+1} = \frac{w_1}{s_n}p_n^2 \qquad B_{n+1} = \frac{w_2}{s_n}q_n^2 \qquad C_{n+1} = 2\frac{w_3}{s_n}p_nq_n \qquad \text{où} \quad s_n = w_1p_n^2 + w_2q_n^2 + 2w_3p_nq_n.$$

   1° Montrer alors que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est telle que pour chaque n on ait :

   $$p_{n+1} = p_n \cdot \frac{(w_1 - w_3)p_n + w_3}{(w_1 + w_2 - 2w_3)p_n^2 + 2(w_3 - w_2)p_n + w_2}.$$

   2° On étudie le cas où $w_1 = w_2 = 1$ et $w_3 = \frac{1}{2}$.

   a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, comparer p_n et $\frac{1}{2}$ suivant les valeurs de p_0, $0 < p_0 < 1$.

   b. Étudier les variations de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   c. En déduire que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite que l'on déterminera en fonction de p_0.

   3° Dans le cas où $w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$ et $w_3 = 1$ étudier la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en suivant la démarche indiquée par les questions *a, b, c* du 2°.

3. L'allèle a_1 est responsable d'un pelage uniforme et l'allèle a_2 d'un pelage tigré mais ce dernier caractère est dominant, c'est-à-dire que tout animal de type T_2 ou de type T_3 a un pelage tigré.

   1° Déterminer en fonction de A_n la probabilité α_n de l'événement « un chat de la génération $\mathcal{G}_n$ a le pelage uniforme », et la probabilité β_n de l'événement « un chat de la génération $\mathcal{G}_n$ a le pelage tigré ».

   2° Dans les trois situations étudiées au 1., 2.2°, 2.3°, étudier l'existence et la valeur éventuelle d'une limite pour les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

o o o

o

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail